Correction Feuille 3 : Espaces vectoriels

(ça n'a pas été relu, il peut y avoir des erreurs !)

Exercice 30
On suppose que $M_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
1.

(i) $A_n(\mathbb{R})$ **est un sous-espace vectoriel de** $M_n(\mathbb{R})$:
- On a bien $A_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ par définition, donc montrons que $A_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.
- La matrice nulle vérifie la relation des matrices anti-symétriques, donc est dans $A_n(\mathbb{R})$.
- Soient A et B dans $A_n(\mathbb{R})$, donc ${}^tA = -A$ et ${}^tB = -B$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On veut montrer que $\lambda A + B$ vérifie la relation des matrices anti-symétriques :

$$\begin{aligned} {}^t(\lambda A + B) &= \lambda\left({}^tA\right) +{}^t B \\ &= \lambda(-A) + (-B) \text{ par définition de } A \text{ et } B \\ &= -(\lambda A + B) \end{aligned}$$

donc $\lambda A + B$ est dans $A_n(\mathbb{R})$.
On déduit de ces trois points que $A_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.

(ii) $S_n(\mathbb{R})$ **est un sous-espace vectoriel de** $M_n(\mathbb{R})$:
- On a bien $S_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ par définition, donc montrons que $S_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.
- La matrice nulle vérifie la relation des matrices symétriques, donc est dans $S_n(\mathbb{R})$.
- Soient A et B dans $S_n(\mathbb{R})$, donc ${}^tA = A$ et ${}^tB = B$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On veut montrer que $\lambda A + B$ vérifie la relation des matrices symétriques :

$$\begin{aligned} {}^t(\lambda A + B) &= \lambda\left({}^tA\right) +{}^t B \\ &= \lambda(A) + (B) \text{ par définition de } A \text{ et } B \\ &= \lambda A + B \end{aligned}$$

donc $\lambda A + B$ est dans $S_n(\mathbb{R})$.
On déduit de ces trois points que $S_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.

2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrons que $\dfrac{A +^t A}{2}$ est une matrice symétrique :

$$\begin{aligned} {}^t\left(\frac{A +^t A}{2}\right) &= \frac{{}^t(A +^t A)}{2} \\ &= \frac{{}^tA +^t ({}^tA)}{2} \\ &= \frac{{}^tA + A}{2} \end{aligned}$$

d'où $\dfrac{{}^tA + A}{2}$ est dans $S_n(\mathbb{R})$.

Montrons que $\dfrac{A -^t A}{2}$ est une matrice anti-symétrique :

$$\begin{aligned} {}^t\left(\frac{A -^t A}{2}\right) &= \frac{{}^t(A -^t A)}{2} \\ &= \frac{{}^tA -^t({}^tA)}{2} \\ &= \frac{{}^tA - A}{2} \\ &= -\left(\frac{A -^t A}{2}\right) \end{aligned}$$

d'où $\dfrac{{}^tA - A}{2}$ est dans $A_n(\mathbb{R})$.

3. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On peut aussi écrire

$$\begin{aligned} A &= A + \frac{1}{2}\left({}^tA -^t A\right) \\ &= \frac{1}{2}(2A) + \frac{1}{2}\left({}^tA -^t A\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(2A +^t A -^t A\right) \\ &= \frac{1}{2}\Big((A +^t A) + (A -^t A)\Big) \\ &= \frac{A +^t A}{2} + \frac{A -^t A}{2} \end{aligned}$$

donc toute matrice de $M_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique. D'où $M_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R}) + S_n(\mathbb{R})$.

4. Soit A une matrice dans $A_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$, alors A vérifie

$$\Big({}^tA = A \text{ et } {}^tA = -A\Big) \Rightarrow A = -A$$

d'où pour tout (i,j) on a $a_{i,j} = -a_{i,j}$, cad $a_{i,j} = 0$. Donc A est la matrice nulle. On en déduit que $A_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$ sont en somme directe. De plus, avec la question précédente, on a

$$A_n(\mathbb{R}) \oplus S_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R}).$$

5. D'après les questions précédentes, on sait que A peut s'écrire

$$A = \frac{A +^t A}{2} + \frac{A -^t A}{2}$$

où $\dfrac{A +^t A}{2}$ est une matrice symétrique et $\dfrac{A -^t A}{2}$ est une matrice anti-symétrique. On calcule ces matrices :

$$\frac{A + {}^tA}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 2.5 \\ 2.5 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{A - {}^tA}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La première matrice est bien symétrique, et la deuxième est bien anti-symétrique.